

灰色理論的 GM(1,1)模型在時間數列結構轉折之研究

The study in structure change of time series use the GM(1,1) model of gray theory

廖敏治¹

摘要

本文以灰色理論為基礎對時間數列資料結構性轉變的問題進行探討。運用灰色理論累加生成的數據資料建構 GM(1,1)模式，再藉由灰色模式的誤差分析來了解整體資料的變動軌跡，並提出相關的檢定法則，以判定資料的離群值(outliers)、轉折點(change point)或轉折區間(change period)。

首先，我們先選取部分資料建構適合的灰色 GM(1,1)動態模式，以了解資料變動的軌跡，並掌握資料規律性。隨著資料的替換，我們可以建構整體動態模式，若發現資料替換造成軌跡產生了劇烈的變動，這表示此資料或整段資料並不在先前資料的運行軌跡中，亦即此資料可能是離群值或是轉折點。若為整段資料不在先前資料的運行軌跡中，而轉換為另一模式，即為轉折區間。

我們將所提出來的方法與其他找時間數列轉折點及轉折區間的方法做比較。最後，以 1979~2012 年的匯率月平均資料為例來驗證吾人所提出的方法。結果有 10 個轉折區間，最長的轉折區間為 1986/03~1988/05 共 27 個月。最短的轉折區間為 2003/10~2004/04 共 7 個月。

關鍵詞:灰色理論，結構性轉變，GM(1,1)模式，轉折點，轉折區間，美/台匯率

ABSTRACT

We want to use the gray theory in the structure change of time series. According the datum by the accumulated generating operation (AGO) to construct the gray model of first derivate and one input variable, that is GM(1,1), then use the error analysis of gray model to get the datum fluctuant trace and propose the detecting method for the outliers, change points, or change periods.

First, we choose some datum to fit a dynamic model of GM(1,1). To get the datum fluctuant trace and its rule of datum. Along with data change we can construct the global dynamic model of the datum. If we find the violent fluctuant in the trace of data, that display this data is not in the circulating trace, that show this data is an outliers or change point. If there are many data not in the trace and become another model, that reveal a change period.

Last, I'll use the model construction process to construct the dynamic model and find the outliers, change point, or change period in the future for the month's average exchange rate of US/NT dolar from 1979 to 2012, and to prove the efficiency and practicality of this method. There are ten change periods. The longest change period has 27 months from 1986/03 to 1988/05. The shortest change period has 7 months from 2003/10 to 2004/04.

Keywords: gray theory, structure change, GM(1,1), change point, change period, exchange rate

¹正修科技大學金融管理系副教授，Email:liawdr@csu.edu.tw

1.前言

傳統上，時間數列的模式建構需要足夠的資料才能建立一個較佳的模式。但是隨著資料的增多，整體資料很容易受外在因素的影響，而變成了非線性或非穩定的時間數列。

對於非線性時間數列，研究學者為有效的解釋一些非線性時間數列模提出了 VAR 模式、門檻模式 (TAR 模式)、雙線性模式 (bilinear model)、ARCH 模式、GARCH 模式等等。但是，目前對於非線性時間數列所提出的檢定方法，如 LM test、bispectrum test、LR test 等等的對立假設皆侷限於某一類的時間數列，而無法涵蓋各種非線性模式。因此，如何對這些資料運用非線性模式來進行良好的配適，並不是一件容易執行的工作。

而在非穩定型資料的模式建構方面，Tsay(1988)討論允許離群值及變異數改變的自迴歸移動平均模式，並提出找變異數改變的方法。Broemeling and Tsurumi(1987)的結構性改變專書中，使用貝氏技巧討論經濟模式的結構性改變。Wu and Chen(1999)建議可利用轉折點 (change point) 的觀點，將非穩定型和非線性的時間數列依其結構性改變的情況區分為數個區域，而每個區域的資料可服從某個穩定型或線性 ARIMA 時間數列模式。而針對結構性轉變的研究，還有 Chow(1960)，Hsu(1982)，及 Nyblom(1989)等多位學者，均提出不同轉折發生的檢定方法。另外 Inclan and Tiao(1994)提出利用中心化的累加平方和法 (Centered Cumulative Sums of Square) 來偵測多重階段變異數改變的方法以找出時間數列變異數變動的時期。Wu and Chen (1999)利用修正後的中心化的累加平方和法及模糊熵方法，提出找尋轉折區間的方法，並應用在來台觀光人數需求的轉折研究。陳美源與陳禮潭 (2003) 運用 Kuan-Chen(1994)的檢定方法作為檢定結構性變動的基礎，並以 Lee-Strazicich(1999, 2003)的 minimum LM 檢定法作為具結構性變動之單根檢定的基礎來驗證美/台實質匯率的結構性變動，結果存在兩個結構性變動，分別為 1988 年 2 月及 1997 年 11 月。黃于珍(2007)利用 Bai and Perron(1998, 2003) 及 Elliott and Muller(2003)的檢測方法檢測亞太地區實質匯率的結構性轉變，他是以季資料來進行研究，其中台灣的實質匯率有三個時段發生轉變分別為 1986Q4~1988Q2(1987Q2)、1997Q1~1998Q1(1997Q3) 及

2000Q4~2001Q3(2001Q2)。

而事實上，大量數據的獲得是相當不容易的，故大多數的系統所能夠得到的訊息是相當有限的，而灰色分析正是針對此種貧訊息的條件下對系統作分析。灰色理論由鄧聚龍(1982)提出，自此已廣泛的使用於許多方面，如灰色關聯分析、灰色模式建構、灰色預測、灰色決策、灰色規劃等等。Deng(1988)提出灰色模式 (gray model, GM model) 對資料進行模式建構及預測，成為一個新的模式建構方法。而灰色 GM(1,1) 模式本身可以是線性及非線性模式，也可以是穩定及非穩定的模式，因此上述的各種模式均可涵蓋在內，再加上只要小樣本 (4 個樣本) 即可進行模式建構，所以本研究擬利用灰色理論，可以運用少量資料即可以建構時間數列模式的特性來進行探討。利用灰色理論累加生成的數據資料建構 GM(1,1) 模式，再藉由灰色模式的誤差分析來了解整體資料的變動軌跡，並提出相關的檢定法則，以判定資料的離群值 (outliers)、轉折點 (change point) 或轉折區間 (change period)。

首先，我們先選取部分資料建構適合的灰色 GM(1,1) 動態模式，以了解資料變動的軌跡，以及掌握資料規律性。我們隨著資料的替換，建構整體動態模式，若發現資料替換造成軌跡產生了劇烈的變動，這表示此資料產生了跳變的情況，而不在先前資料的運行軌跡中，亦即此資料是離群值或轉折點。若為整段資料產生了跳變的情況，而不在先前資料的運行軌跡中，而轉換為另一模式，即為轉折區間。

我們將所提出來的方法與其他找時間數列轉折點及轉折區間的方法做比較。最後，以 1979~2012 年的匯率月平均資料為例來驗證吾人所提出的方法。結果有 10 個轉折區間，最長的轉折區間為 1985/08~1988/05 共 34 個月。最短的轉折區間為 2003/10~2004/04 共 7 個月。

2.研究方法

本研究，想要應用鄧聚龍(1988)所提的灰色 GM(1,1) 模式建構流程，建構動態的 GM(1,1) 模式，並在此建模的過程中，利用模式合適與否的變化，找出脫離模式的資料，並建立判定準則，以決定資料是否為離群值，轉折點或是轉折區間的起始點。

GM(1,1) 模式的建構步驟如下：

步驟 1：累加生成 (Accumulated Generating

Operation, AGO) 假設原始數列 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n))$ 。

定義 $x^{(1)}$ 為 $x^{(0)}$ 的一次 AGO 數列，則 $x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), x^{(1)}(3), \dots, x^{(1)}(n))$ ，

其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k=1,2,3,\dots,n$

步驟 2：建立灰微分方程式 $dx^{(1)}(t)/dt + ax^{(1)}(t) = b$ ，其中 a, b 為待估計參數；上式可進一步改寫為下列差分方程式的型態：

$$x^{(0)} + az^{(1)}(k) = b, k=2,3,4,\dots,n \quad (1)$$

其中

$$z^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k) + (1-\alpha)x^{(1)}(k-1) \quad (2)$$

$$\hat{x}^{(1)}(k) = [x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}, \text{ 其中 } x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) \quad (6)$$

步驟 5：累減生成 (Inverse Accumulated Generating Operation, IAGO) 經一次累減運算即

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), \text{ 且 } \hat{x}^{(0)}(1) = x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) \quad (7)$$

若所得的模式適合，即可進一步利用此模式進行預測，以求得未來資料的估計值。

步驟 6：(後驗差檢驗) 所得的灰色預測模式是否合適，必須加以檢驗以確保模式預測的可信度。後驗差是利用傳統的統計方法對原始數列及配適所得的數列作誤差分析，其進行方式如下：(吳漢雄等，1996)

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x^{(0)}(k) - \bar{x}^{(0)})^2}, \text{ 其中 } \bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k) \quad (9)$$

2. 求誤差數列標準差 S_2 ，

$$S_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (q(k) - \bar{q})^2}, \text{ 其中 } \bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q(k) \quad (10)$$

3. 求後驗差比 C

註：通常取 $\alpha = 0.5$ 。

步驟 3：建立數據矩陣，並利用最小平方方法做參數估計：

$$B = \begin{bmatrix} -0.5(x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)) & 1 \\ -0.5(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)) & 1 \\ \dots & \dots \\ -0.5(x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n)) & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Y_n = [x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), x^{(0)}(4), \dots, x^{(0)}(n)]^T \quad (4)$$

利用最小平方方法求解，可得 a, b 的估計值如下：

$$[a, b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_n \quad (5)$$

步驟 4：解出灰微分方程式之通解

可將一次累加數列還原得模式對原始數列的配適值；亦即

首先定義配適誤差為 $q(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$ ，

1. 求原始數列的標準差 S_1 ，

$$C = \frac{S_2}{S_1} \quad (11)$$

4. 求小誤差機率 P

$$P = \text{Prob}\{|q(k) - \bar{q}| \leq 0.6745S_1\} \quad (12)$$

5. 利用 C、P 值查表 1 預測精準度的等級

表 1：預測精準度等級表

預測精準度的等級	P	C
一級：好(GOOD)	≥ 0.95	≤ 0.35
二級：合格(QUALIFIED)	≥ 0.8	≤ 0.5
三級：勉強(JUST)	≥ 0.7	≤ 0.65
四級：不合格(UNQUALIFIED)	≤ 0.7	≥ 0.65

資料來源：(吳漢雄等，1996，p88)

根據上面的模式配適精準度的等級表，我們將利用模式配適的 C 值及 P 值得變化情況，就可以了解資料的變動軌跡，是否說離原本模式的離群值，轉折點或是轉折區間的起始點。因此，我們需要下列的定義，來定義轉折區間及轉折點。

定義 2.1 (分類集)

對一時間數列 $\{y_t, t=1, 2, \dots, N\}$ 而言，我們令 $\{P_i, i=1, 2, \dots, N-n\}$ 為由時間序列的 N 個資料中，選取 n 個連續資料進行模式建構所得的誤差機率值數列。在給定的顯著水準 λ 之下，若 P_i 值超過 $1-\lambda$ 給定其值為 1，否則為 0，並令 P 為我們最後的分類集。

定義 2.2 (模糊點集)

假設 $\{R_j, j=1, 2, \dots\}$ 是定義 2.1 中分類集 P 包含了一連串未被改變的相同分類的子集，並令 $\#(R_j)$ 表示其長度，若 $\#(R_j) < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 且 $\#(R_j)/\#(R_{j-1}) < 1$ ，則稱 R_j 中的元素為模糊點集。其中 $\lceil \cdot \rceil$ 表示高斯函數。

為了分類這些模糊點集，Wu and Cheng(1999)曾提出下列方法來歸類，即令 V 是 $\{y_t, t=1, 2, \dots, N\}$ 的模糊點集，若 $\#(R_{j+1})/\#(R_j) < 1$ ，我們將 R_{j+1} 的點集併入 R_j

點集的並且重新編排這新的連串分類集為 $\{R_j^*, j=1, 2, \dots\}$ 。

例如 2.1

令

$R = \{0000000000111000000001101111111\dots\}$ ，則 $\{R_j\}$ 的相關連串分類子集為 $R_1 = \{0000000000\}$ ， $R_2 = \{111\}$ ， $R_3 = \{00000000\}$ ， $R_4 = \{11\}$ ， \dots 。若我們取 $n=10$ ，則 $\#(R_2)=3 < 5$ 且 $\#(R_2)/\#(R_1) < 1$ ，因此我們將 R_2 併入 R_1 。經過相同的判斷之後得新的

$R^* = \{00000000000000000000000000001111111\dots\}$ ，且 $R_1^* = \{000000000000000000 0000000\}$ ，且 $R_2^* = \{11111111\}$ 。

定義 2.3 轉折區間

對一時間數列 $\{y_t, t=1, 2, \dots, N\}$ 而言，我們令 R^* 為由時間數列重新排列之後的連串集合，若連串的值為 1 且個數超過 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ ，則稱資料進入轉折區間。

定義 2.4 轉折點

根據定義 2.3，我們取連串的連續區間的中位數為轉折點。

3. 模擬研究

3.1 兩個 TAR 模式的模擬

門檻自迴歸 (threshold autoregressive ,

TAR)時間數列是一個典型的轉換型非線性時間數列。對一個時間數列 $\{y_t\}$ 而言，一般的 $TAR(r; t_1, t_2, \dots, t_{r-1})$ TAR 模式可表為：

$$y_{t_j} + I_j(\phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{t_j-t_{j-1}-1} \phi_i^{(j)} y_{t_j-i}) = \varepsilon_{t_j}^{(j)}, \quad j=1,2,\dots,r \quad (13)$$

其中

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{若 } y_t \in \{y_{t_j}, y_{t_{j-1}}, \dots, y_{t_{j+1}}\} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad j=1,2,\dots,r \quad (14)$$

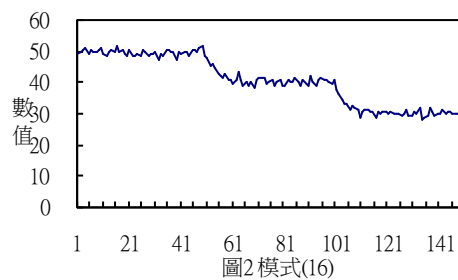
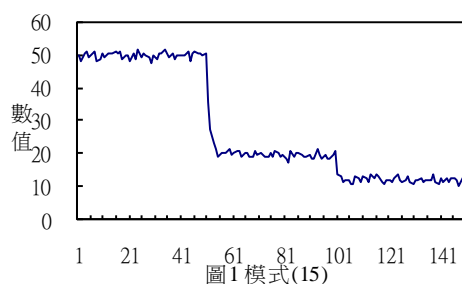
並且， $\varepsilon_{t_j}^{(j)}$ 是一個具有有限變異數 σ_ε^2 的白干擾過程。

為了比較方便，我們模擬了與 Wu and Chen(1999)所模擬的兩個相同的 $TAR(3; t_1, t_2)$ 時間數列資料，其模式如下：

$$y_t = \begin{cases} 10 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} & \text{若 } t < 51 \\ 10 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} & \text{若 } t = 51, 52, \dots, 100 \\ 10 + 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.2\varepsilon_{t-1} & \text{若 } t > 100 \end{cases} \quad (15)$$

$$y_t = \begin{cases} 10 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1} & \text{若 } t < 51 \\ 8 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1} & \text{若 } t = 51, 52, \dots, 100 \\ 6 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1} & \text{若 } t > 100 \end{cases} \quad (16)$$

其資料走勢如下：



共模擬了 150 個觀察值，其中有均數及趨勢， $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ 。

3.2 轉折點與轉折區間的檢查與討論

根據第二章的研究方法，我們繪模式(15)

及模式(16)的數值走勢與 P 值分類圖，如圖 3 及圖 4。

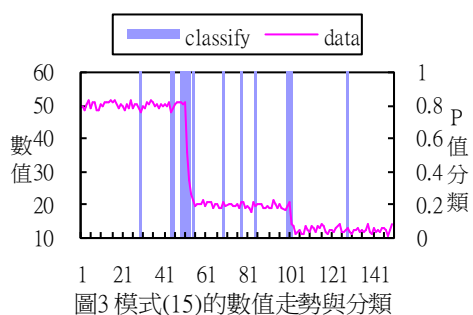


圖3 模式(15)的數值走勢與分類

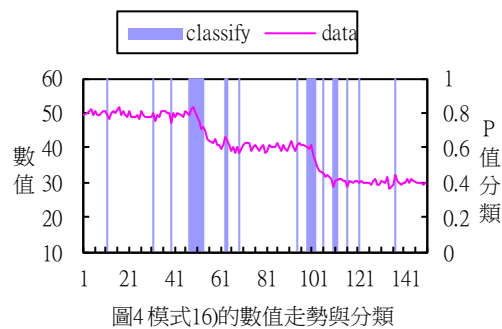


圖4 模式(16)的數值走勢與分類

由圖 3、定義 2.1，可知模式(15)的轉折區間分別為點 49~53，99~101，所以由定義 2.2 可知轉折點為，51 及 100。而由圖 4、定義 2.1，可知模式(16)的轉折區間分別為點

47~53，98~102，所以由定義 2.2 可知轉折點為，50，100。我們結果整理，並與其它方法比較如下：

表 2：多種檢定法的比較結果

	TAR 模式(15)的轉折點或轉折區間	TAR 模式(16)的轉折點或轉折區間
實際值	51，101	51，101
CUSUM	51	53
RCUSUM	48-55，96-103	46-54，96-104
ORCUSUM	54-63，96-104	46-53，98-102
ACFE	58-61，133-135	49-53，102-109，119-124
本研究 n=5	49-53(51)，99-101(100)	47-53(50)，98-102(100)

註：(.)表示轉折點

在與其它的方法比較之下，本文是最能夠找到轉折點的方法。因此，我們將此方法應用到實例上。

以 1979/1~2012/12，台幣對美元月平均匯率的資料來探討，先繪其走勢圖如下圖 5：

4.實例探討



圖 5：1979/1~2012/1 台幣對美元月平均匯率的資料走勢圖

根據本研究方法，我們取 $n=10$ 及 $\lambda=0.05$ 與 P 值分類圖，如圖 6。

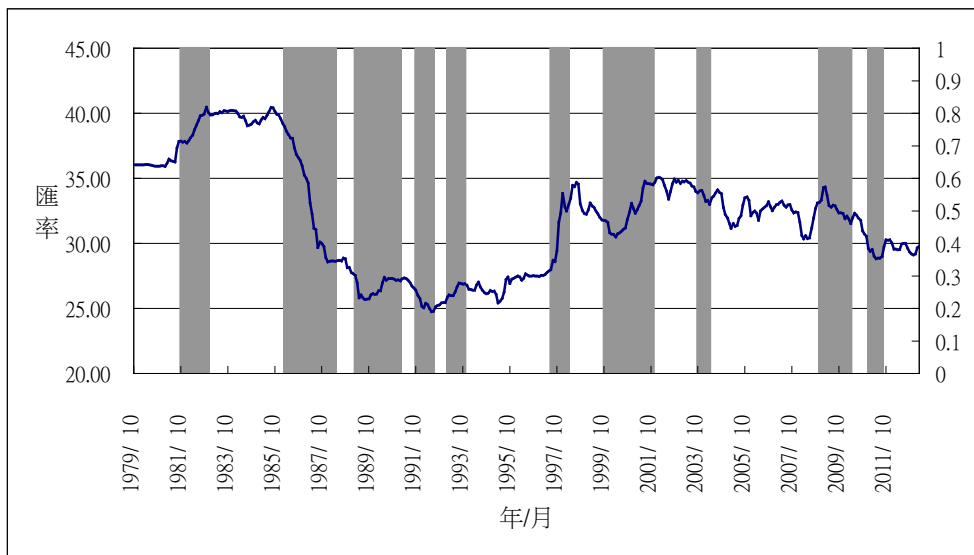


圖 6：台幣對美元月平均匯率走勢與 P 值分類圖

由圖 6 及定義 2.3 及 2.4，經整理可得轉折區間及轉折點如表 3：

表 3：台幣對美元月平均匯率的轉折區間及轉折點

	高	低	轉折區間(年/月)	匯率變化	區間長度	轉折點(年/月)	匯率
1	40.48	37.71	1981/10~1982/12	37.87↑40.06	15	1982/05	38.76
2	38.99	28.58	1986/03~1988/05	38.99↓28.62	27	1987/04	33.10
3	27.53	25.68	1989/03~1991/02	27.53↓27.12	24	1990/02、1990/03	26.24
4	26.41	24.76	1991/10~1992/07	26.41↓24.77	10	1992/02、1992/03	25.22
5	26.95	25.85	1993/02~1993/11	25.85↑26.89	10	1993/06、1993/07	26.46
6	33.85	27.98	1997/07~1998/04	27.98↑32.98	10	1997/07、1998/04	32.00
7	34.78	30.49	1999/10~2001/11	31.77↑34.50	26	2000/10、2000/11	32.13
8	34.06	33.01	2003/10~2004/04	33.90↓33.01	7	2004/01	33.69
9	34.34	31.52	2008/12~2010/04	33.15↑31.52	17	2009/08	32.88
10	29.61	28.81	2011/01~2011/08	29.61↓29.00	8	2011/04、2011/05	28.91

由表 3 可以看出從 1979/01~2012/12 其間台幣對美元的匯率總共經過了 10 次的轉折，共有 5 次貶值及 5 次升值，而時間最長的為 1986/03~1988/05 共 27 個月的轉折區間為最長，台幣也由 38.99 升值到 28.62 共升值了 10.37 元。而時間最短的為 2003/10~2004/04 共 7 個月的轉折區間為最短，台幣也由 33.90 升值到 33.01 共升值了 0.89 元。而台幣貶值的轉折區間最長者為 1999/10~2001/11 的 26 個月，由 31.77 貶值到 34.50 共貶值了 2.73 元。

5. 結論

在經濟與財務的時間數列資料，常常有轉折的現象，我們若使用單變量自迴歸移動平均模式族，或任何簡單模式來分析這些資料，常常無法解決轉折點或轉折區間的定位問題。本文的貢獻，在於將灰色理論 GM(1,1) 模型應用在時間數列的轉折區間及轉折點的判別上，並且對於任何的時間數列均適用上。

參考文獻：

1. 吳漢雄，鄧聚龍，及溫坤禮，1996，灰色分析入門，57-91 頁，台北：高立圖書。
2. 陳美源、陳禮潭，2003，購買力平價說與結構性變動—美／台實質匯率之實證研究，台灣經濟預測與政策，第三十四卷第一期，93-112。
3. 黃于珍，2007，實質匯率之結構改變—亞太地區之實證研究，中山大學經濟學研究所碩士在職專班碩士論文。
4. Bai, J. and P. Perron, 1998. Estimation and Testing Linear Models with Multiple

- Structural Changes. *Econometrica*, 55, No.1 47-78.
5. Bai, J. and P. Perron, 2003a. Computation and Analysis of Multiple Structural Changes Models. *Journal of Applied Econometrics*, 18, No.1 1-22.
6. Bai, J. and P. Perron, 2003b. Critical Values for Multiple Structural Changes Tests. *Econometrics Journal*, Royal Economic Society, 6, No.1 72-78.
7. Broemeling, L. D., and Tsurumi, H., 1987. *Econometrics and Structure Change*, New York: Marcel-Dekker.
8. Chow, G. C., 1960. Testing for Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions. *Econometrica*. 28, 291-605.
9. Deng, J., 1982. Control Problems of Grey system. *System and Control Letters*, V1, No.5.
10. Deng, J., 1988. Modeling of The GM Model of Grey System. *Essential Topics on Grey System Theory and Application*, China Ocean Press, pp.40-53.
11. Elliott, G. and U. K., 2003. Optimally Testing General Breaking Processes in Linear Time Series Models. Manuscript, University of California at San Diego.
12. Hsu, D. A., 1982. A Bayesian Robust Detection of Shift in the Risk Structure of Stock Market Returns. *Journal of the American Statistical Association*. 77, 29-39.
13. Inclan, C. & Tiao, G. C., 1994. Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance. *Journal of the American Statistical Association*, 89(427). 913-924.
14. Kuan, C.-M. and Chen, M.-Y., 1994.

- Implementing the Fluctuation and Moving-estimates Tests in Dynamic Econometric Models. *Economics Letters*, 44, 235–39.
15. Lee, J. and Strazicich, M. C. ,1999. Minimum LM Unit Root Test with Two Structural Breaks. Manuscript, University of Central Florida.
 16. Lee, J. and Strazicich, M. C., 2003 . Minimum LM Unit Root Test with Two Structural Breaks. *Review of Economics and Statistics*, 85, 1082-1089.
 17. Nyblom, J. ,1989. Testing for the constancy of Parameters Over Time. *Journal of the American Statistical Association*, 84, 223-230.
 18. Tsay, R. ,1988. Outliers, Level Shifts, and Variance Changes in Time Series . *Journal of Forecasting*, 7, 1-20.
 19. Wu, B. and Chen, M. ,1999. Use fuzzy statistical methods in change periods detection. *Applied Mathematics and Computation*. 99, 241-254.